



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

ÁNGULO DIEDRO

CICLO

PREUNIVERSITARIO

2024-1



ÁNGULO DIEDRO

Definición. Se denomina ángulo diedro o simplemente diedro, a la unión de una recta y los dos semiplanos no coplanares, determinados por la recta.

Notación:

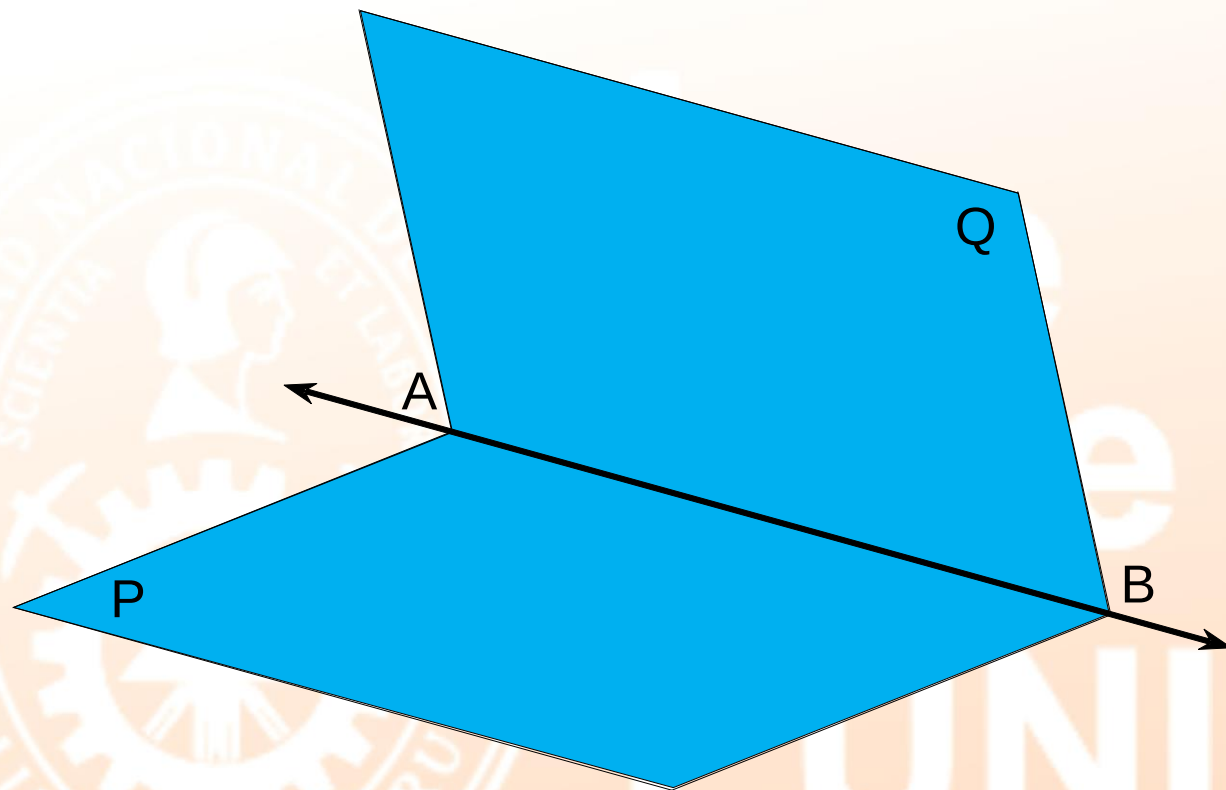
diedro $P - AB - Q$

diedro AB

Elementos:

Arista. La recta que determina los semiplanos. En la figura: $\overleftrightarrow{AB}$

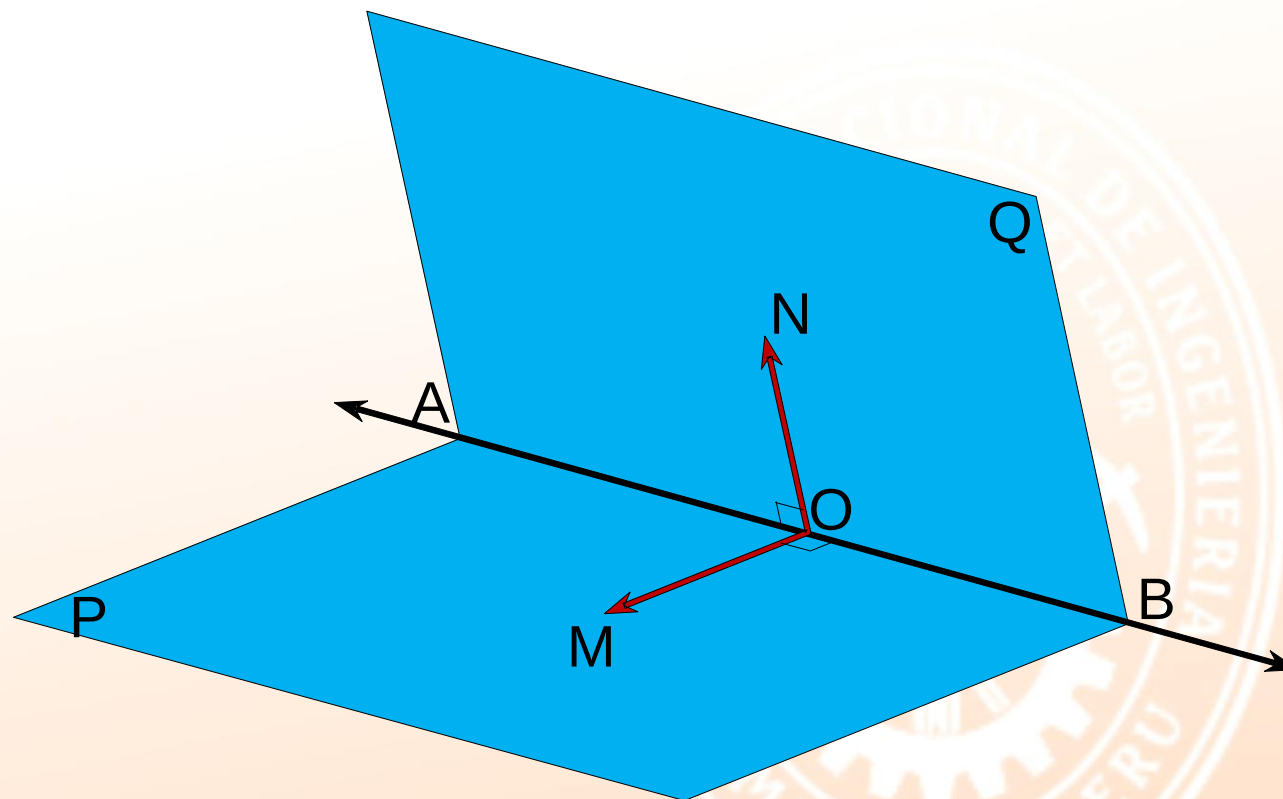
Cara. Cada uno de los semiplanos, unido con la arista. En la figura: P y Q



ÁNGULO PLANO O RECTILINEO DE UN DIEDRO

Definición. Es el ángulo formado por dos rayos perpendiculares a la arista, cada uno contenido en una cara del ángulo diedro.

Ejemplo: $\angle MON$



MEDIDA DE UN ÁNGULO DIEDRO

Definición. La medida de un ángulo diedro es igual a la medida de su ángulo plano.

Notación:

$m(P-AB-Q)$: medida del diedro $P-AB-Q$

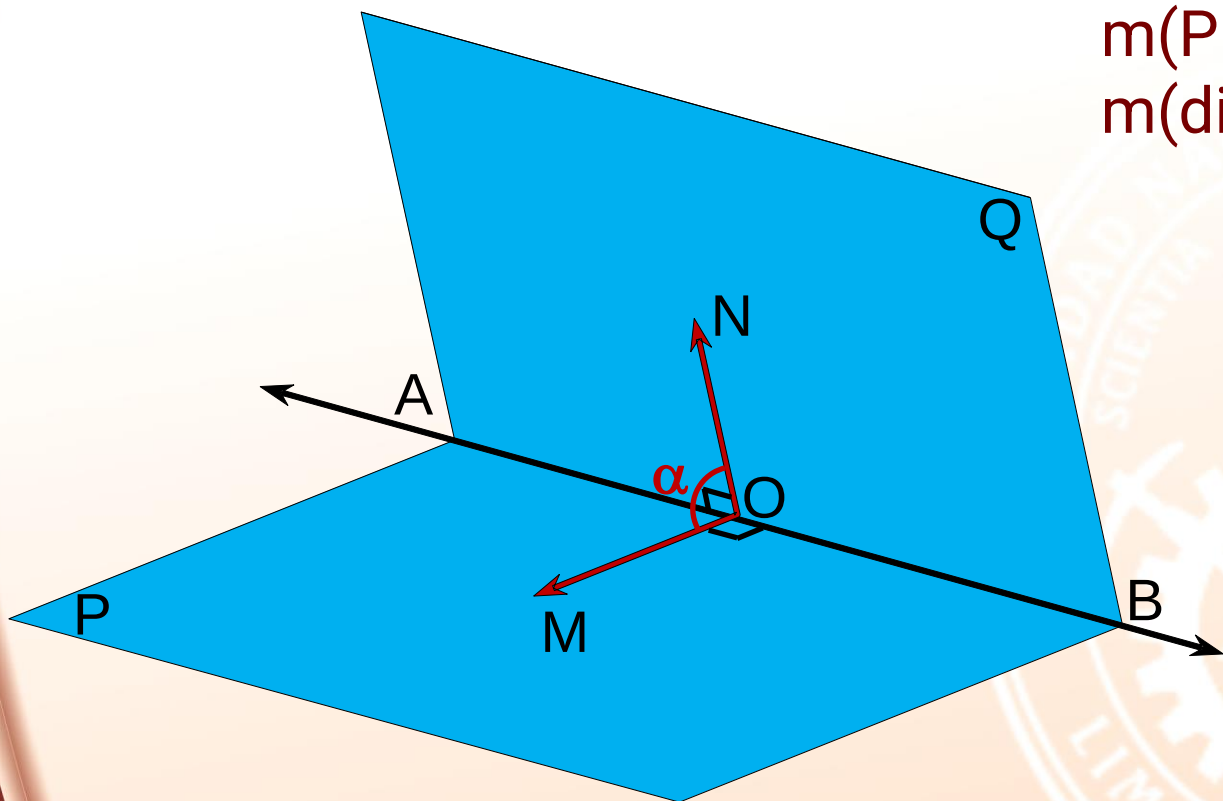
$m(\text{diedro } AB)$: medida del diedro AB

$$m(P-AB-Q) = m\angle MON = \alpha$$

$\alpha < 90 \Leftrightarrow$ el diedro es agudo

$\alpha = 90 \Leftrightarrow$ el diedro es recto

$\alpha > 90 \Leftrightarrow$ el diedro es obtuso



EJERCICIO 01

Una hoja de papel de forma cuadrada, cuyos por vértices son M, N, T y Q, se dobla por la diagonal $\overline{MT}$. Si la distancia entre N y Q es igual a MN, entonces la medida del diedro MT es

A) 120

B) 60

C) 150

D) 45

E) 90

RESOLUCIÓN 01

Una hoja de papel de forma cuadrada, cuyos por vértices son M, N, T y Q, se dobla por la diagonal $\overline{MT}$. Si la distancia entre N y Q es igual a MN, entonces la medida del diedro MT es

x: medida del diedro MT

$\triangle MNT$, $\overline{NO}$ es altura

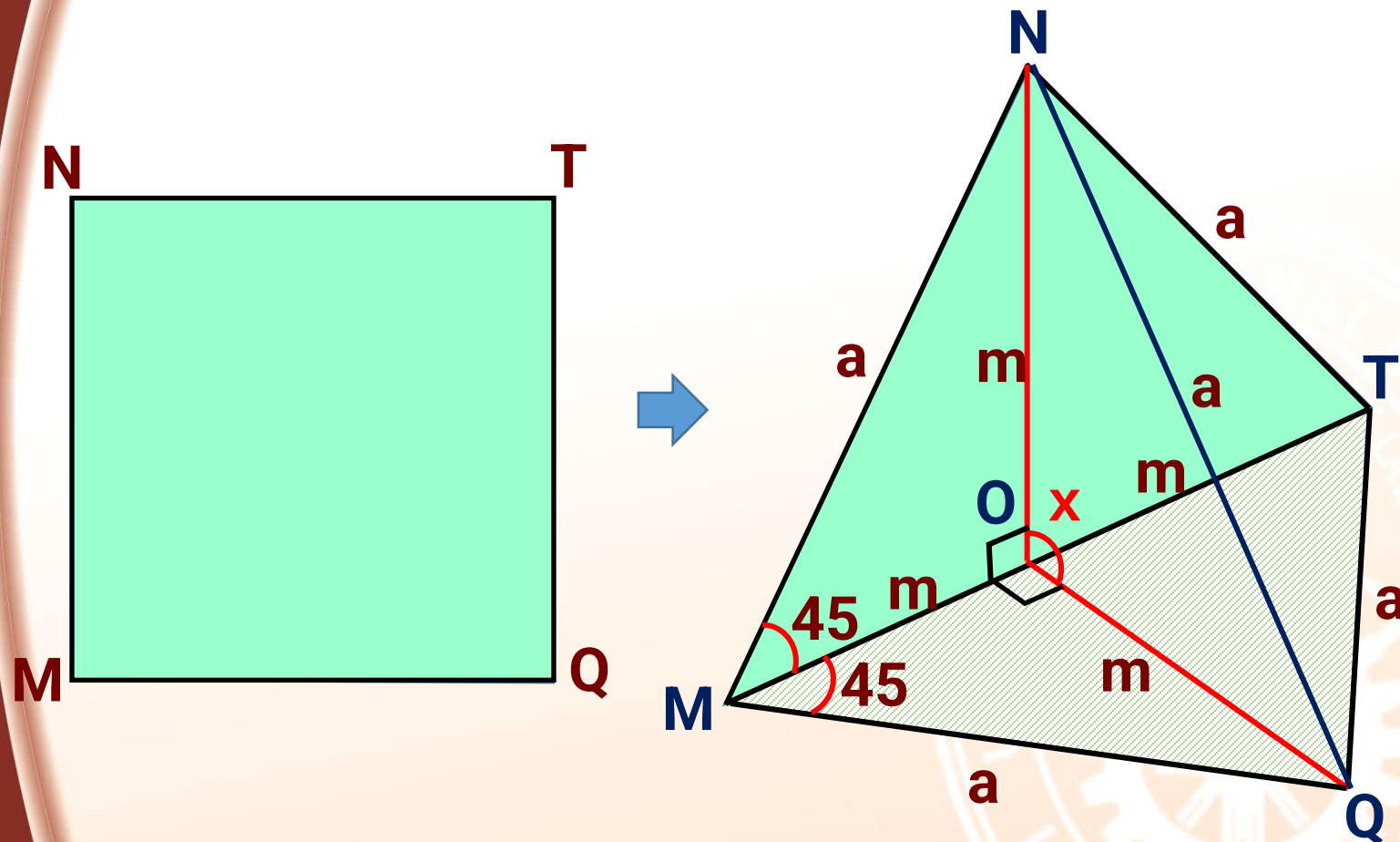
$\triangle MQT$, $\overline{QO}$ es altura

$\Rightarrow m\angle NOQ = x$

$\triangle NOM \cong \triangle NOQ \dots$ (LLL)

$\therefore x = 90$

Clave: E



EJERCICIO 02

En un ángulo diedro P-AB-Q, desde un punto interior M se trazan las perpendiculares $\overline{ME}$, $\overline{MF}$ y $\overline{MD}$ a la cara PAB, a la arista AB y a la cara QAB, respectivamente. Si $MD = \frac{MF}{2} = \frac{ME}{\sqrt{2}}$, entonces la medida de dicho ángulo diedro es

A) 75

B) 60

C) 45

D) 30

E) 90

RESOLUCIÓN 02

En un ángulo diedro P-AB-Q, desde un punto interior M se trazan las perpendiculares $\overline{ME}$, $\overline{MF}$ y $\overline{MD}$ a la cara PAB, a la arista AB y a la cara QAB, respectivamente. Si $MD = \frac{MF}{2} = \frac{ME}{\sqrt{2}}$, entonces la medida del ángulo diedro es

$$\overline{AB} \perp \text{plano R}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{FE}, \overline{AB} \perp \overline{FD} \wedge \overline{AB} \perp \overline{MF}$$

$$m\angle EFD = x = m\angle EFM + m\angle MFD$$

$$x = x_1 + x_2$$

$\triangle MDF$ es notable de 30 y 60

$$x_2 = 30$$

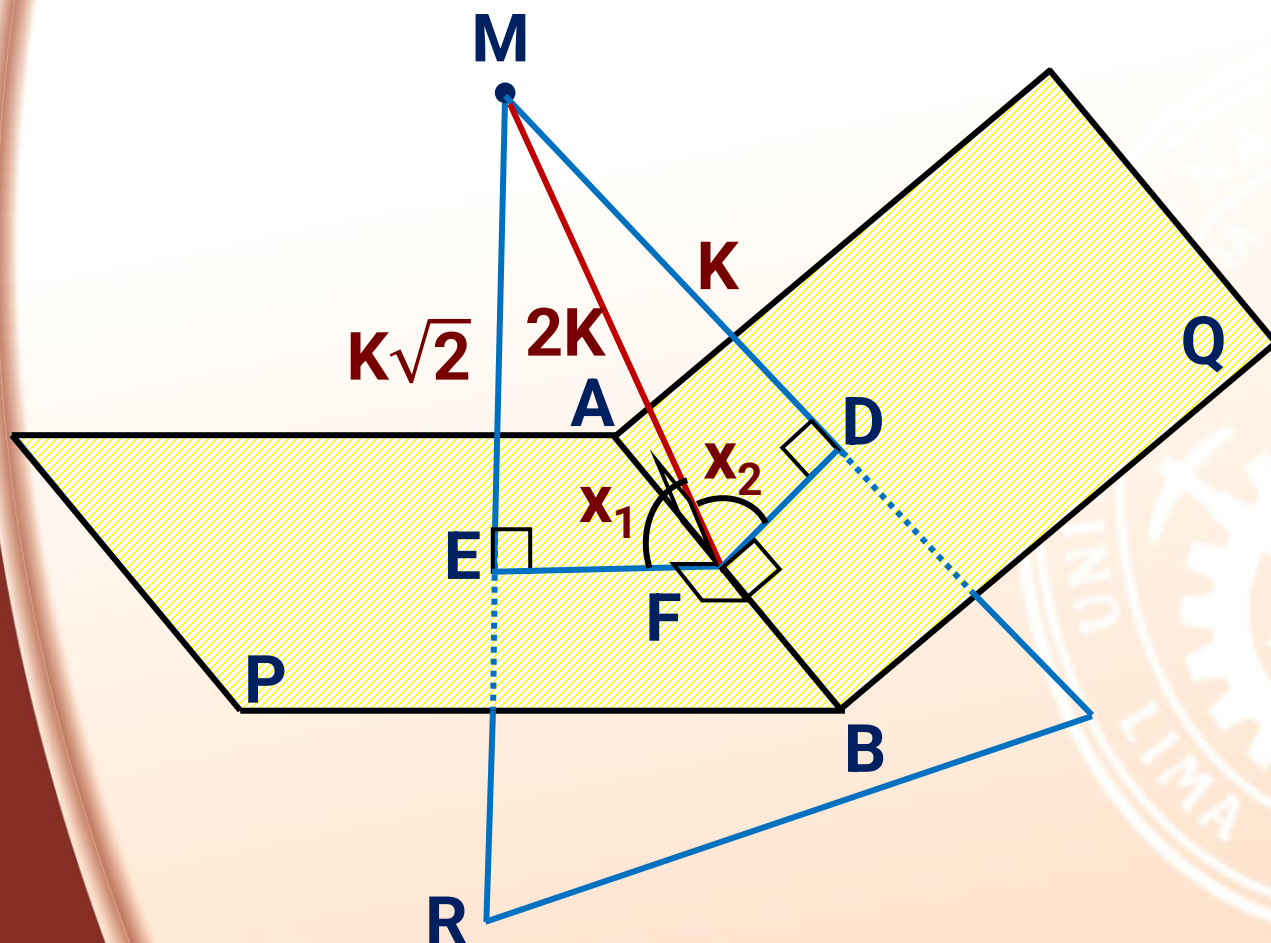
$\triangle MEF$ es notable de 45 y 45

$$x_1 = 45$$

$$\text{Luego, } x = 45 + 30$$

$$\therefore x = 75$$

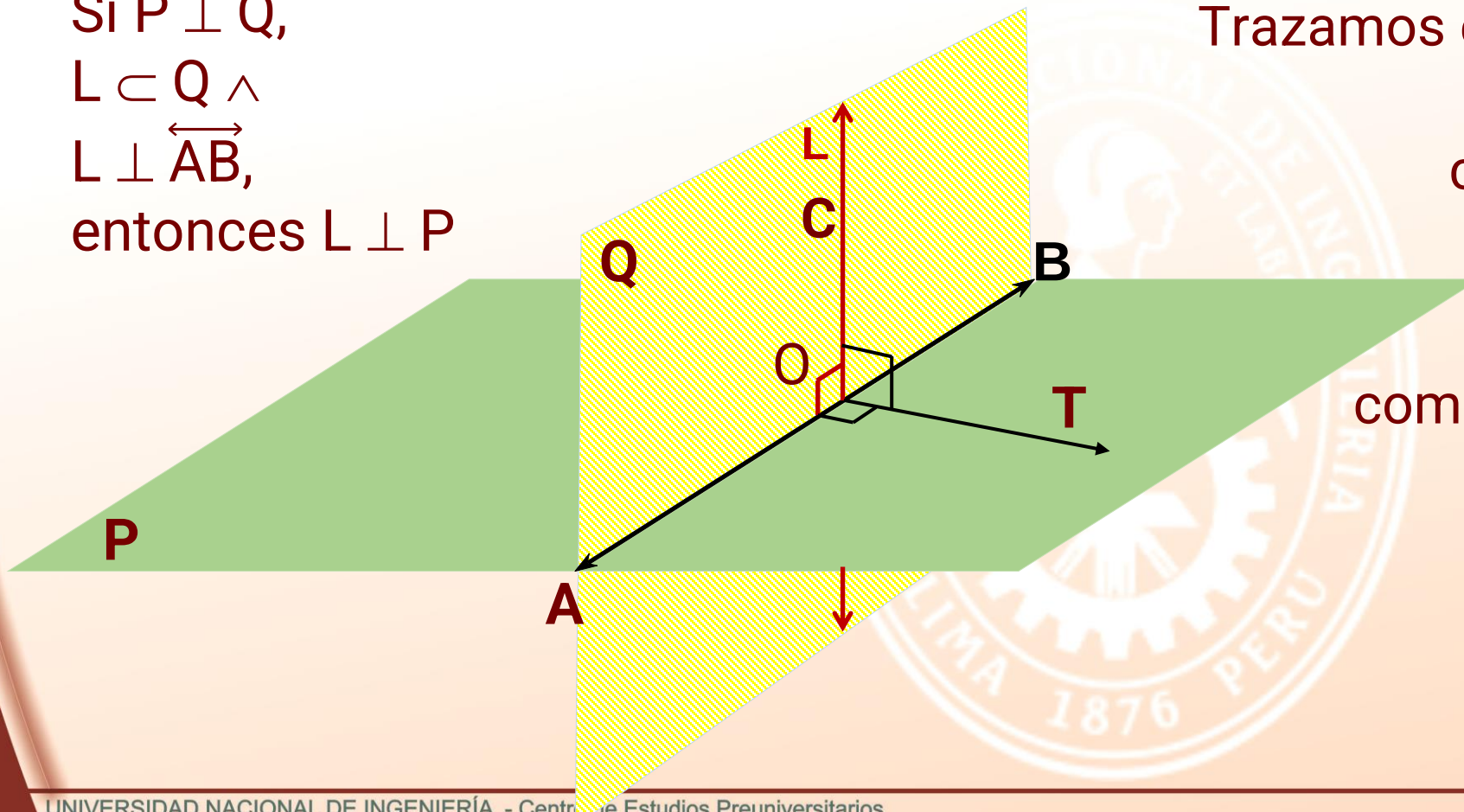
Clave: A



Teorema

Si dos planos son perpendiculares y una recta, contenida en uno de ellos, es perpendicular a la intersección de los planos, entonces dicha recta es perpendicular al otro plano.

Si $P \perp Q$,
 $L \subset Q \wedge$
 $L \perp \overleftrightarrow{AB}$,
 entonces $L \perp P$



Demostración:

Trazamos en el plano P:

$$\overrightarrow{OT} \perp \overline{AB}$$

como $P \perp Q$,
 entonces:

$$m\angle COT = 90$$

como: $L \perp \overline{OA} \wedge$

$$L \perp \overline{OT}$$

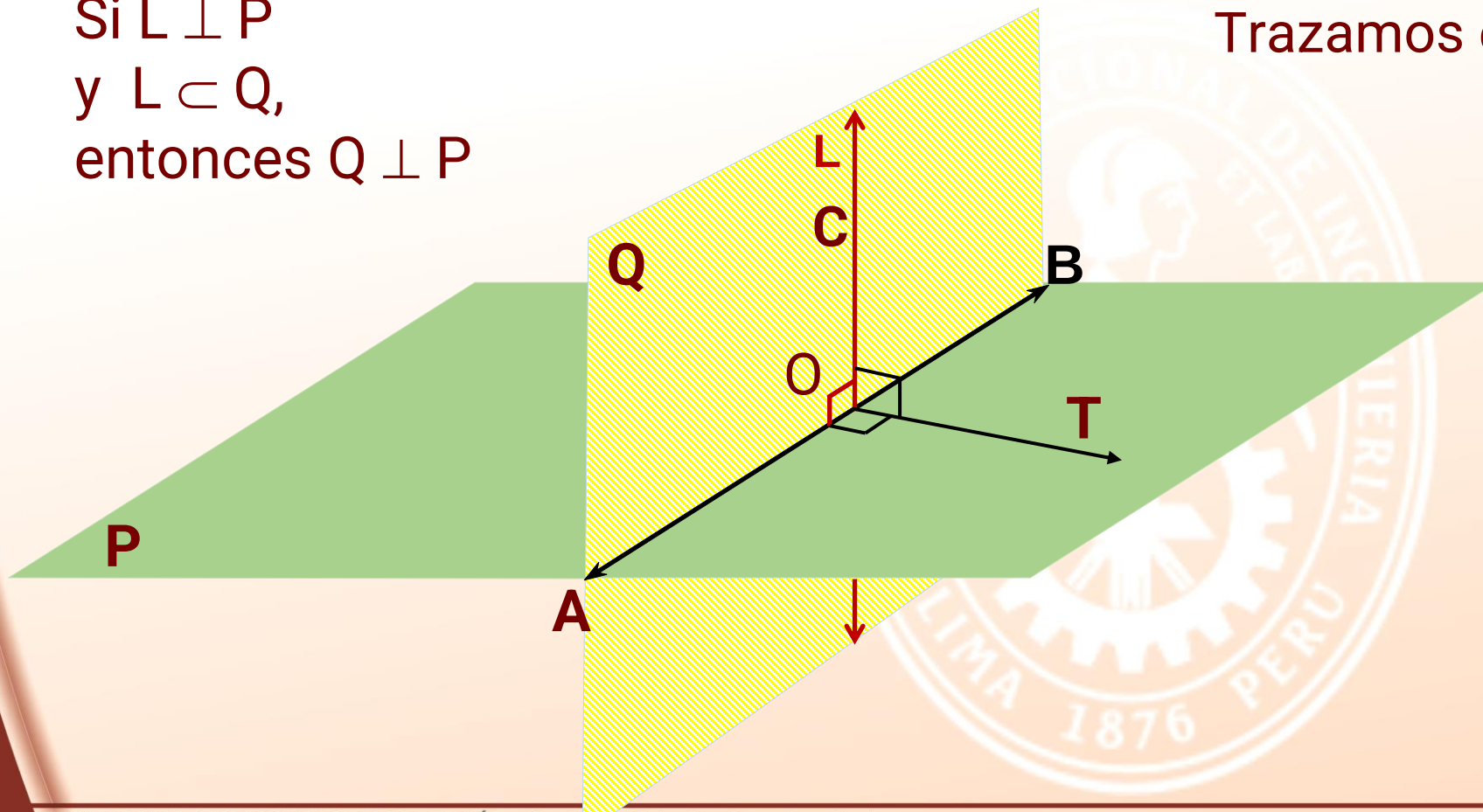
$$\therefore L \perp P$$

l.q.q.d.

Teorema

Si una recta es perpendicular a un plano, entonces todo plano que contiene a la recta será perpendicular al otro plano

Si $L \perp P$
y $L \subset Q$,
entonces $Q \perp P$



Demostración:

Trazamos en el plano P:

$\overrightarrow{OT} \perp \overrightarrow{AB}$
como $L \perp P$
entonces:

$$m\angle COT = 90$$

$\therefore Q \perp P$

l.q.q.d.

EJERCICIO 03

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Las rectas contenidas en las caras de un diedro, son paralelas a la arista del diedro.
- II. El ángulo diedro es un conjunto convexo.
- III. Toda recta perpendicular a uno de dos planos perpendiculares, es paralelo al otro plano.

A) VVV

D) FVV

B) FFF

E) VVF

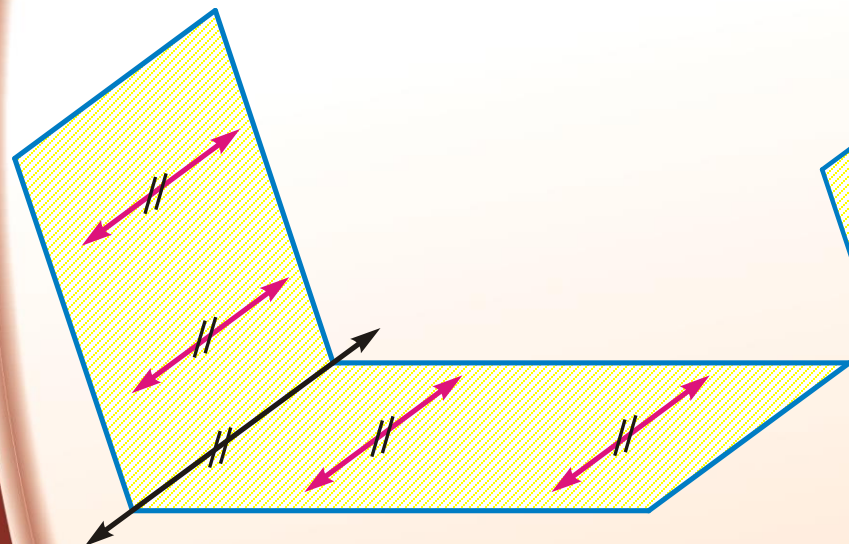
C) VFF

RESOLUCIÓN 03

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Las rectas contenidas en las caras de un diedro, son paralelas a la arista del diedro.
- II. El ángulo diedro es un conjunto convexo.
- III. Toda recta perpendicular a uno de dos planos perpendiculares, es paralelo al otro plano.

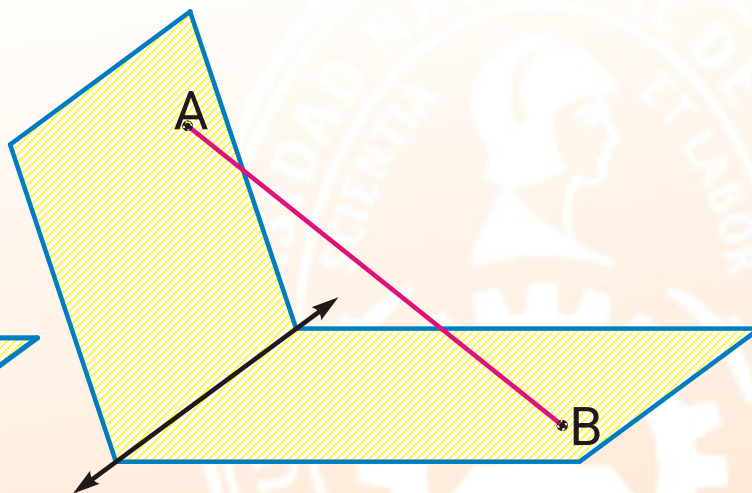
I.



VERDADERO.

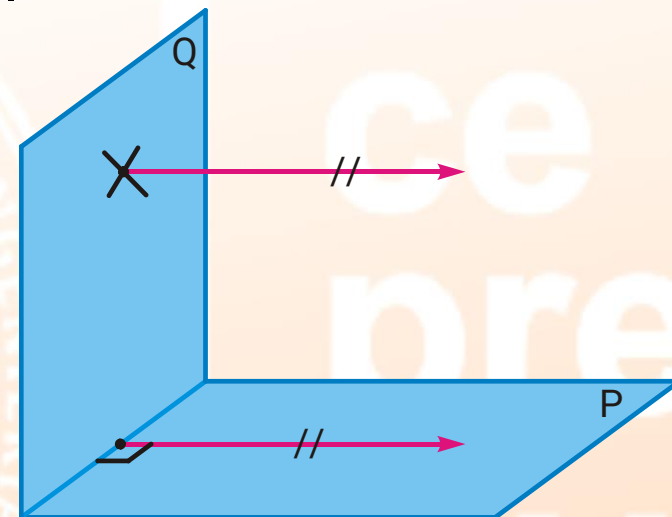
RESPUESTA: VFF

II.



FALSO

III.



La recta puede estar contenida en dicho plano

FALSO

Clave: C

EJERCICIO 04

Dos regiones triangulares equiláteras ABC y ABE determinan un diedro. Si $AB = 2\sqrt{5}$ m y $CE = 2\sqrt{3}$ m, entonces la medida del diedro es

A) 26,5
D) 53

B) 37
E) 60

C) 45

ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 04

Dos regiones triangulares equiláteras ABC y ABE determinan un diedro. Si $AB = 2\sqrt{5}$ m y $CE = 2\sqrt{3}$ m, entonces la medida del diedro es

$$m(\text{diedro } C - \overline{AB} - E) = \alpha = ?$$

$\triangle ABC$ y $\triangle ABE$, equiláteros:

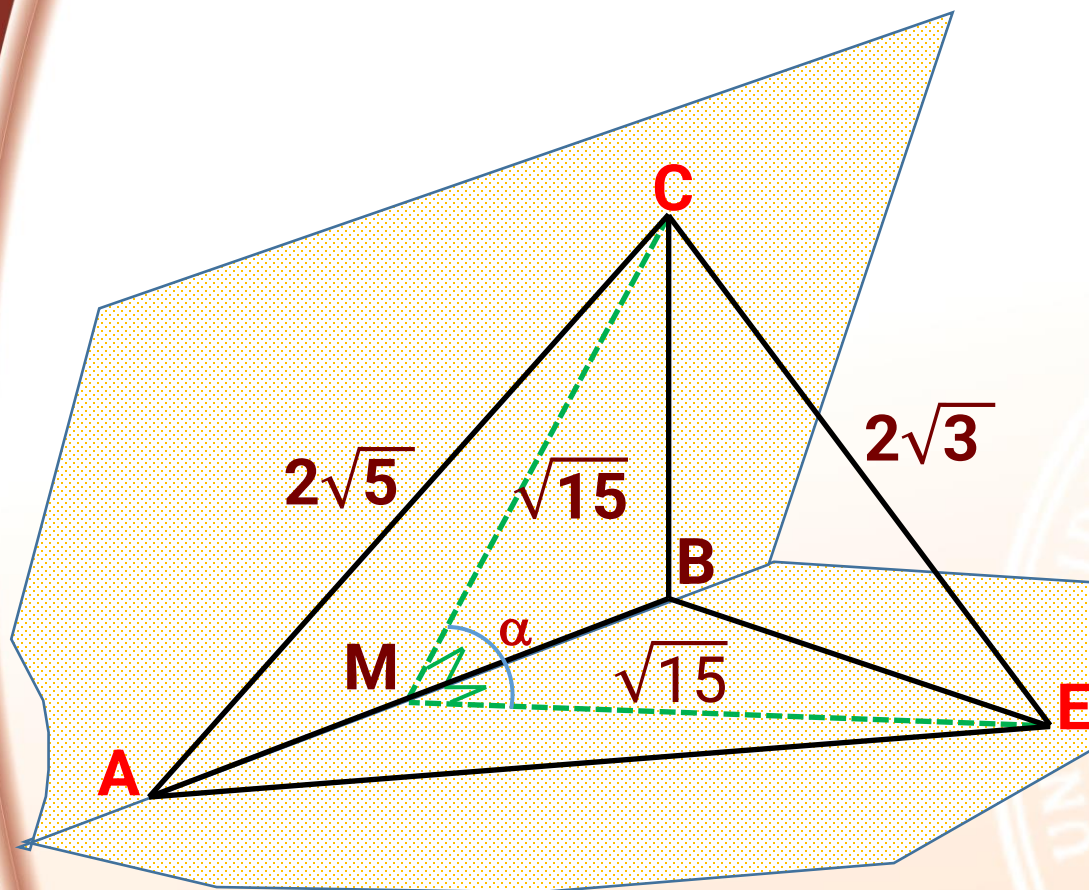
$$CM = EM = \frac{2\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$$

$\triangle CME$, teorema del coseno:

$$(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{15})^2 + (\sqrt{15})^2 - 2(\sqrt{15})(\sqrt{15})\cos\alpha$$

$$\text{De donde: } \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \alpha = 53$$



Clave: D



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA
REGIÓN POLIGONAL SOBRE UN
PLANO

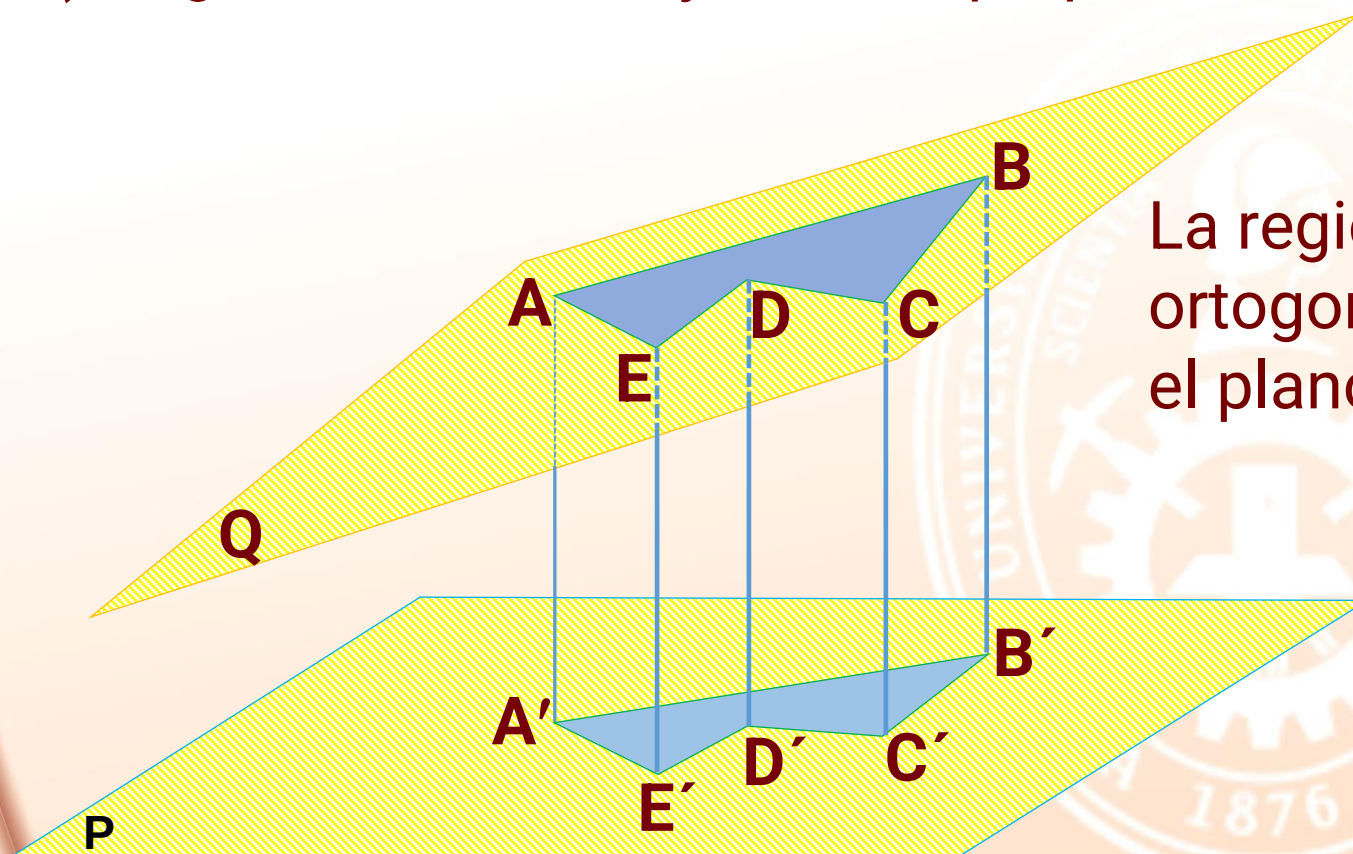
CICLO
PRE
2024-1



Definición

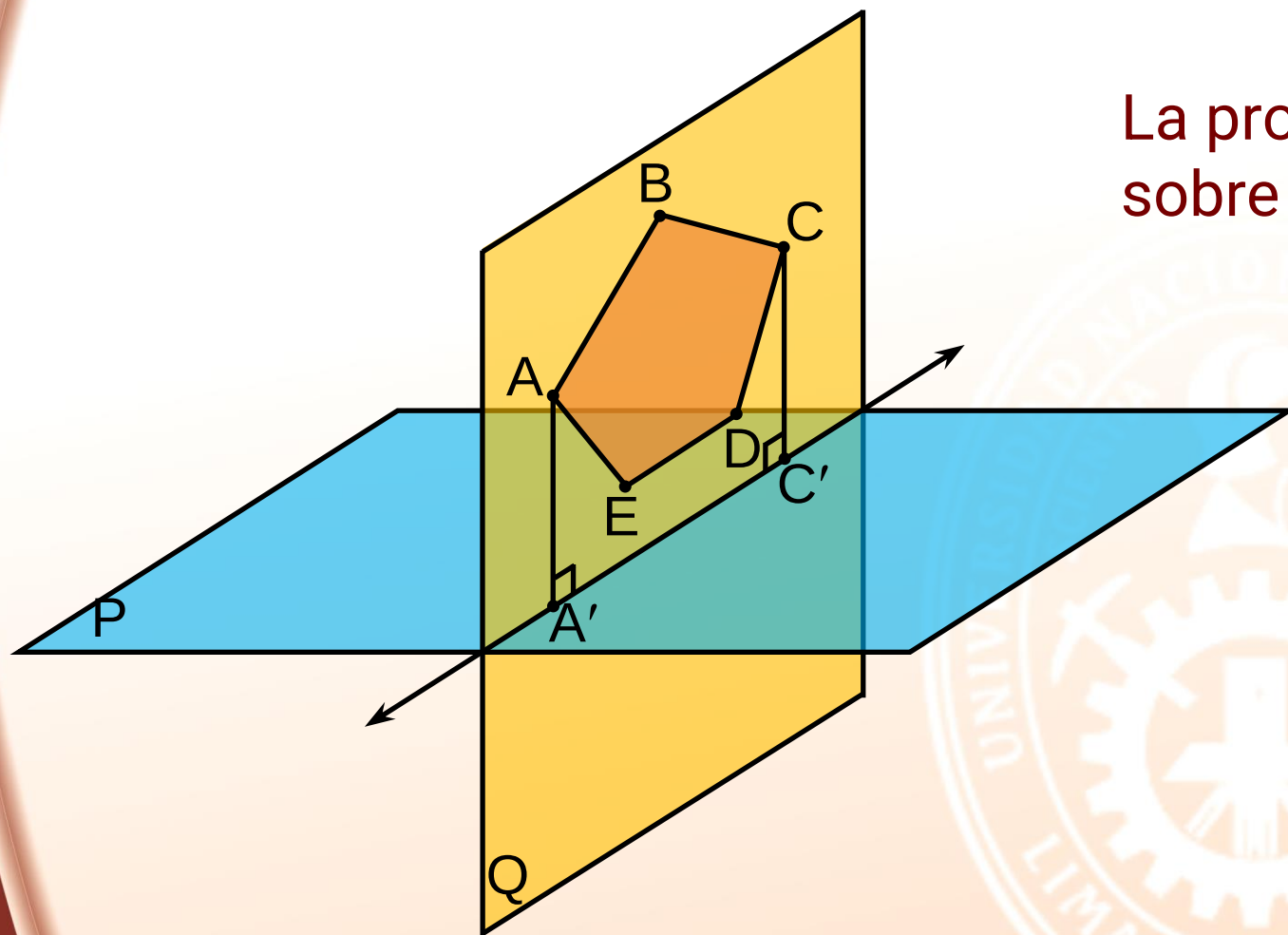
Se denomina proyección ortogonal de una región poligonal sobre un plano, al conjunto de puntos que son las proyecciones de todos los puntos de la región poligonal, sobre dicho plano.

1) Región $ABCDE \subset Q$ y Q no es perpendicular a P :



La región $A'B'C'D'E'$ es la proyección ortogonal de la región $ABCDE$, sobre el plano P .

2) Región $ABCD \subset Q$ y $Q \perp P$:



La proyección ortogonal de $ABCD$, sobre P , es el segmento $A'C'$

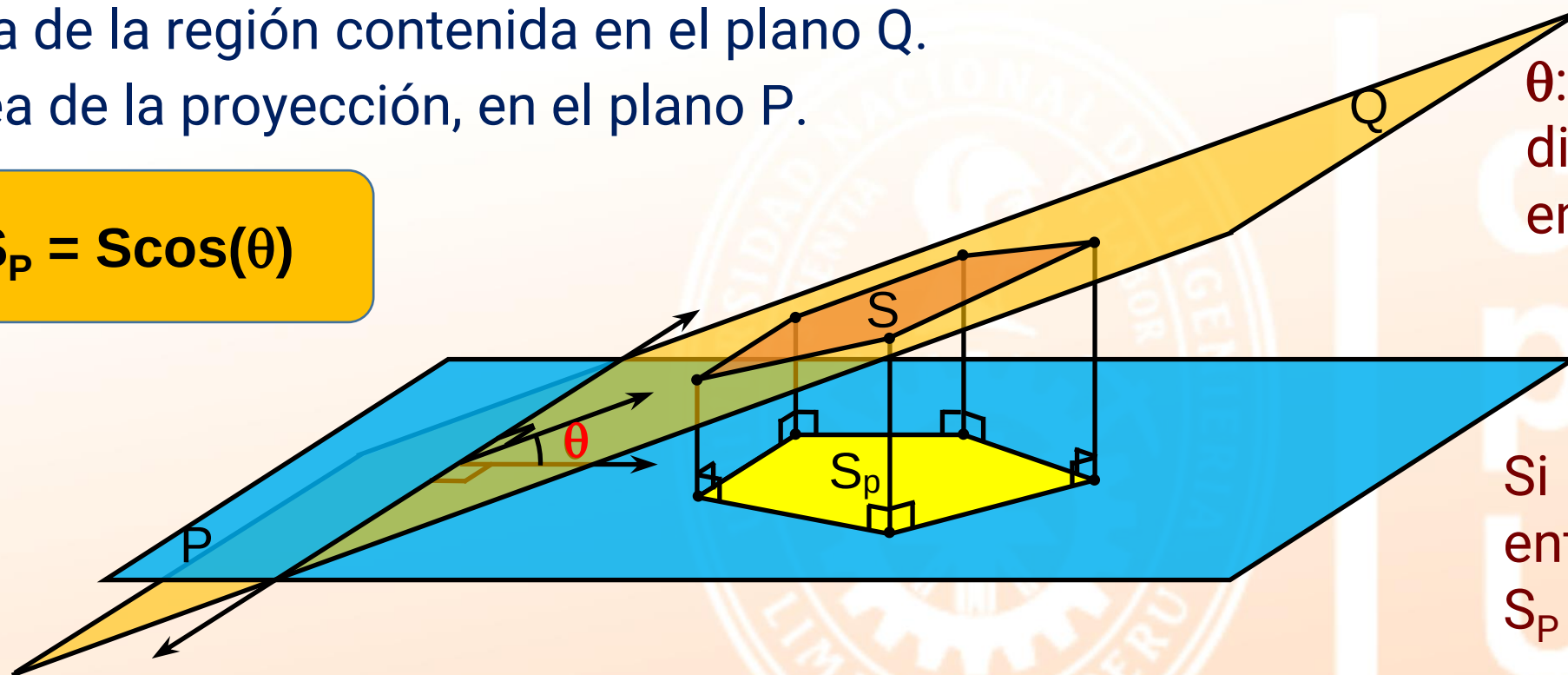
Teorema

El área de la proyección ortogonal de una región poligonal, sobre un plano no perpendicular al plano que la contiene, es igual al área de dicha región poligonal, por el coseno de la medida del menor diedro que determinan, el plano que contiene a la región poligonal y el plano de proyección.

S : área de la región contenida en el plano Q .

S_p : área de la proyección, en el plano P .

$$S_p = S \cos(\theta)$$



θ : medida del diedro agudo, entre P y Q .

Si $P \parallel Q$,
entonces
 $S_p = S$

EJERCICIO 05

En una de las caras de un ángulo diedro, está contenida una región hexagonal regular. Si la medida del diedro es 60° y el lado del hexágono regular mide 4 u, entonces el área (en u^2) de la proyección de la región hexagonal sobre la otra cara del ángulo diedro es

A) $10\sqrt{3}$

B) $12\sqrt{3}$

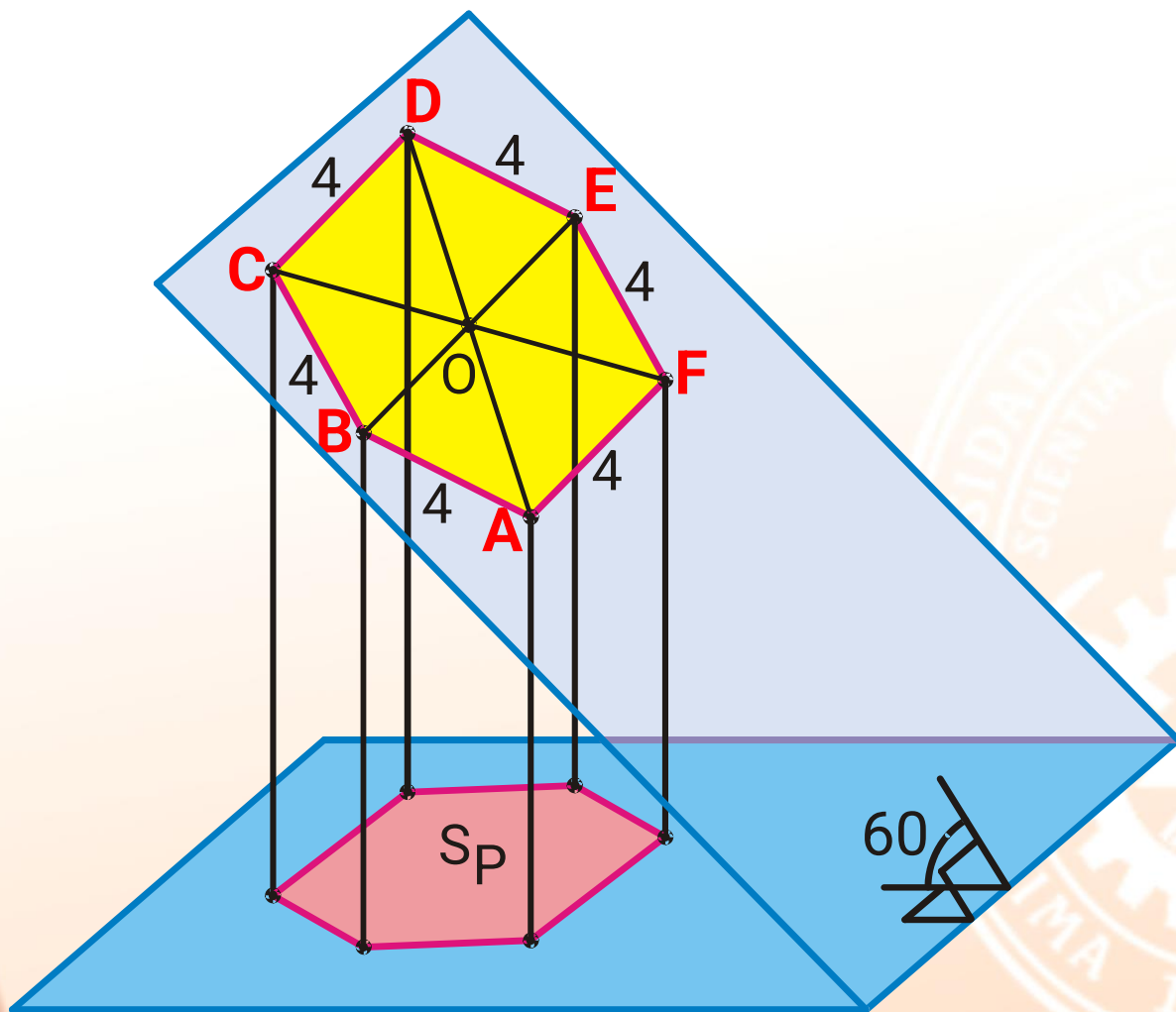
C) $15\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{3}$

E) $20\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN 05

En una de las caras de un ángulo diedro, está contenida una región hexagonal regular. Si la medida del diedro es 60 y el lado del hexágono regular mide 4 u, entonces el área (en u^2) de la proyección de la región hexagonal sobre la otra cara del ángulo diedro es



$$S_P = ?$$

Teorema:

$$S_P = (S_{ABCDEF}) \cdot \cos 60$$

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle AOF}$$

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot (4^2) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCDEF} = 24 \sqrt{3}$$

Reemplazando:

$$S_P = (24 \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore S_P = 12 \sqrt{3}$$

Clave: B